LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Departamento de Matemática
Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão
Matemática II - 2º Semestre - 2018/2019

Teste Final: 6 de junho de 2019
Duração: 1h10m

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

1. Determine a solução geral da equação $y'' - 4y = x^2$.

Resolução:
Começamos por resolver a equação homogénea associada $y'' - 4y = 0$. A equação característica é $D^2 - 4 = 0$, equação que tem 2 raízes reais distintas 2 e -2. Desta forma a solução geral da equação homogénea é $y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$, com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Como o 2º menbro é um polinómio de grau 2 vamos procurar uma solução particular que seja também um polinómio do mesmo grau, isto é $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. Substituindo na equação dada $y'' - 4y = x^2$ obtemos

$$2a - 4(ax^2 + bx + c) = x^2 \Leftrightarrow -4ax^2 - 4bx + (2a - 4c) = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} -4a = 1 \\ -4b = 0 \\ 2a - 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 0 \\ c = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

Desta forma obtemos a solução particular $y_p(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$ e portanto a solução geral da equação dada é

$$y_g(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Determine a solução do seguinte problema de valores iniciais: $\begin{cases} (1 + x^2)yy' = (y^2 - 1) \\ y(1) = \sqrt{2} \end{cases}$

Resolução: A equação dada é uma equação de variáveis separáveis: para $y^2 - 1 \neq 0$, isto é, $y \neq 1$ e $y \neq -1$ podemos escrevê-la no forma $\frac{y}{y^2-1}y' = \frac{1}{1+x^2}$ e a sua solução é dada, na forma implicita por

$$\int \frac{y}{y^2 - 1}dy = \int \frac{1}{1 + x^2}dx + C, \quad C \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln|y^2 - 1| = \arctan(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

As funções constantes $y = 1$ e $y = -1$ são também solução da equação dada (note que quando substituídas na equação $(1 + x^2)yy' = (y^2 - 1)$ obtemos $0 = 0$).
Resta-nos calcular o valor de C para o qual temos $y(1) = \sqrt{2}$. Ou seja
$\frac{1}{2}\ln|(\sqrt{2})^2 - 1| = \arctan 1 + C \Leftrightarrow 0 = \frac{\pi}{4} + C \Leftrightarrow C = -\frac{\pi}{4}$.
Portanto a solução do problema de valores inicial dado é, escrita na forma implícita,

$$\frac{1}{2}\ln|y^2 - 1| = \arctan(x) - \frac{\pi}{4}.$$

3. Considere a função $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2)$.

(a) Determine e classifique todos os pontos críticos de f.

Resolução: Os pontos críticos de f são as soluções do sistema $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -2x(y-2) = 0 \\ (y-2) + (y - x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee y = 2 \\ 2y - 2 - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 2 \\ x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \end{cases}.$$

Logo, os pontos críticos de f são $(0,1)$, $(\sqrt{2},2)$ e $(-\sqrt{2},2)$.

A matriz hessiana é dada por $H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -2(y-2) & -2x \\ -2x & 2 \end{bmatrix}$, pelo que se tem

$H_f(0,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $H_f(\sqrt{2},2) = \begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$ e $H_f(-\sqrt{2},2) = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$.

Como $H_f(0,1)$ é definida positiva, conluimos que $(0,1)$ é minimizante local. As restantes matrizes $H_f(\sqrt{2},2)$ e $H_f(-\sqrt{2},2)$, são indefenidas ($\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 \neq 0$) e portanto $(\sqrt{2},2)$ e $(-\sqrt{2},2)$ são pontos de sela.

(b) Prove que a função não é limitada.

Resolução: Notando que, por exemplo, $f(x,0) = (0 - x^2)(0-2) = 2x^2$, é fácil concluir que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x,0) = +\infty.$$

Portanto, a função f pode tomar valores tão grandes quanto se queira e, consequentemente, não é limitada.

4. Calcule $\displaystyle\int\int_\Omega x^2 e^{yx - x^2} dxdy$, sendo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \leq x \wedge y \geq -x \wedge x \leq 2\}$.

Resolução:

$$\begin{aligned} \int\int_\Omega x^2 e^{yx-x^2} dxdy &= \textstyle\int_0^2 \int_{-x}^x x^2 e^{yx-x^2} dydx = \int_0^2 \left[x e^{yx-x^2} \right]_{y=-x}^{y=x} dx \\ &= \textstyle\int_0^2 \left(x - xe^{-2x^2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{e^{-2x^2}}{4} \right]_0^2 = \frac{7}{4} + \frac{e^{-8}}{4} \end{aligned}$$

5. Sendo f uma função real de variável real homogénea de grau 3, considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = yf(y^2 - 3xy).$$

(a) Prove que a função g é uma função homogénea e indique o seu grau de homogeneidade.

Resolução: Como f, por hipótese, é uma função homogénea de grau 3, sabemos que, para todo $u \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda u) = \lambda^3 f(u), \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sejam $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$g(\lambda x, \lambda y) = (\lambda y) f\left((\lambda y)^2 - 3(\lambda x)(\lambda y) \right) = \lambda y f\left(\lambda^2 (y^2 - 3xy) \right)$$

Como f é homogénea de grau 3, temos $f\left(\lambda^2(y^2 - 3xy)\right) = (\lambda^2)^3 f(y^2 - 3xy)$. Consequentemente

$$g(\lambda x, \lambda y) = \lambda y \lambda^6 f(y^2 - 3xy) = \lambda^7 y f(x^2 - 3xy) = \lambda^7 g(x,y).$$

Fica assim provado que a função g é homogénea de grau 7.

(b) Mostre, sem utilizar o facto de g ser uma função homogénea, que g verifica a identidade de Euler.

Resolução: Sendo $u = u(x,y) = y^2 - 3xy$, podemos escrever $g(x,y) = yf(u(x,y)) = yf(u)$. Assim

$$\begin{aligned} x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} &= x\left(y\frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + y\left(f(u) + y\frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ &= xy(-3y)\frac{df}{du}(u) + yf(u) + y^2(2y-3x)\frac{df}{du}(u) \\ &= (-3xy^2 + 2y^3 - 3xy^2)\frac{df}{du}(u) + yf(u) \\ &= 2y(y^2 - 3xy)\frac{df}{du}(u) + yf(u) \\ &= 2yu\frac{df}{du}(u) + yf(u) \end{aligned}$$

Como f função real de variável real é homogénea de grau 3 verifica a identidade de Euler, o que para funções de uma só variável, se traduz em $u\frac{df}{du}(u) = 3f(u)$.
Desta forma, obtemos

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} = 2y.3f(u) + yf(u) = 7yf(u) = 7g(x,y),$$

como queríamos demonstrar.

Cotações:

1	2	3a)	3b)	4	5a)	5b)
1,5	1,5	1,5	1,0	2,0	1,0	1,5